金融風險管理季刊
民95，第二卷，第二期，1-30

相關係數可隨時間變動下的外匯期貨避險比例：簡易方法應用與其績效*

The Hedge Ratios and Performance of Currency Futures with Time-varying Correlations

杜化宇**
Anthony H. Tu
國立政治大學財管系
National Chengchi University

鍾柏婷
Karen Chung
第一金控
First Financial Group

摘　要

本研究應用動態變動相關係數避險模型及因素避險模型從事外匯避險，與常數相關係數避險模型比較避險績效的差異。有別於較複雜的動態變動相關係數模型，本文使用簡易的轉換及因素避險模型，但避險績效仍有明顯的改進。本文研究對象爲在CME交易的英磅、德國馬克、日圓、瑞士法郎及加幣等五種外匯期貨。本研究實證結果如下：(1)在風險最小化架構下，以相對於不避險部位所減少的風險來衡量，平均而言，動態變動相關係數避險模型及因素避險模型，相對於常數相關係數避險模型有較佳的避險效果；(2)研究期間、各幣別相關係數變動的大小之差異會影響動態變動相關係數避險模型及因素避險模型的相對績效；(3)樣本內及樣本外的大部分幣別，以相對於不避險所能減少的風險來衡量，各模型之避險績效皆隨著避險期間增加而增加。

關鍵詞：期貨避險比率，外匯期貨，避險績效，主成份分析

* 本文感謝四位匿名審稿者的細心審閱，並提供寶貴的建議，使本文內容更爲充實，特此致謝。

** 作者通訊：杜化宇，台北市文山區116指南路二段64號國立政治大學財管系。Tel :886-2-29387423, Fax:886-2-29393394, E-mail:atu1106@yahoo.com.tw

Abstract

The article proposes a dynamic bivariate-GARCH hedging model using time-varying correlations for five currency futures (British pound, Deutsche mark, Japanese yen, Swiss franc and Canadian dollar) in the CME and compare that with traditional static model with constant correlation. We consider two techniques in modeling the time-varying correlations: Cholesky decomposition and principal component. We find that (1) the time-varying correlation model outperform the constant correlation one for most of the currency futures. (2) the hedge effectiveness depends on the variations of actual correlations. (3) for both within- and out-of-sample, the hedge effectiveness increases as the hedge-interval extends from one-day to one-week and to four-week.

Key Words：Futures hedge ratio, Foreign currency, Hedge effectiveness, Principal component

1. 緒論

避險相關的理論，由早期的天眞避險轉變至使用投資組合的架構來避險，而避險比率估計方式，也從早期使用的靜態OLS來估計，演變至Ghosh (1993) 主張應加入誤差修正項，及Cecchetti, Cumby & Figlewski (1988) 主張在模型中納入自我迴歸異質條件變異數 (ARCH)，最後再發展至目前最常見的多元條件變異 GARCH 模型[1]。

但是，由於計算上的困難，各多元條件變異GARCH模型在避險上的應用，卻存在一些限制。其中常數相關係數避險模型與BEKK模型因爲計算簡單，因此在實證研究方面廣泛地使用，如Kroner & Sultan (1993)，Park & Switzer (1995)。

不過，常數相關係數的假設已普遍遭到質疑，如Longin & Solnik(1995)曾提出七個主要各國股市間超額報酬的相關係數在高波動時會跟著變大。因此本研究的主要目的在於發展一個模型可使相關係數隨時間變動，並探討是否能提高避險績效。有別於Engle (2002) 針對多變量 GARCH模型所提出的 Dynamic Conditional Correlation (DDC) 模型，本文採用的隨時間變動的相關係數模型強調簡單可行，即利用Cholesky分解式及主成份分析等方法，放寬常數相關係數避險模型中的限制，使模型中的常數相關係數可以隨時間變動，並

[1] 然而，多元條件變異GARCH模型存在各種可能的設計。如Vec模型 (Engle and Kroner (1995))，Diagonal 模型 (Bollerslev, Engle & Wooldridge (1988))，BEKK模型 (Engle and Kroner (1995))，常數相關係數模型 (Bollerslev (1990))，因素模型(Ng, Engle & Rothschild (1992))等。各種方法的優缺點可參考 Franses & van Dijk (2000)的說明。

以英磅、加幣、德國馬克、日圓、瑞士法郎五種外匯期貨與現貨爲避險實證對象，與Kroner & Sultan (1993) 之常數相關係數避險模型進行樣本內外的比較，結果顯示此方法雖簡易但能達到更佳的避險效果。

最後，本文也將一併探討投資人也十分關心的另一項避險相關議題；即避險績效是否會隨避險期間長短而改變。雖然傳統投資組合理論並未提供相關的理論基礎來解決這個問題，不過顯然這個問題對投資人十分重要，若較短的避險期間之避險績效較佳，則投資人應該時常重新計算假設低成本並更換避險比率，反之亦然。

本文後續部分，第2部分介紹期貨避險的理論及相關模型。這包括避險方法的介紹，應用的避險模型到最後如何比較各模型的避險績效等。資料及實證結果則置於第3部分，首先針對資料的來源及處理做說明，再進入資料的基本敘述統計分析，及最後模型之估計與樣本內外績效比較。第4部分爲結論與建議，根據第3部分的實證結果歸納出結論。

2. 期貨避險模型與績效評估

Bivariate GARCH (簡稱 BI-GARCH) 已普遍應用在期貨的避險上。如Baillie & Myers (1991) 實證關於商品期貨的避險，發現相對於固定避險比率，使用二元GARCH (Bivariate GARCH，以下簡稱BI-GARCH) 架構的動態避險可改善避險績效。Kroner & Sultan (1993)，Park & Switzer (1995)，Koutmos & Pericli (1999) 也使用類似方法分別在外匯、股價指數、公債期貨交叉避險方面發現類似的結果。

其中，在外匯期貨的避險應用上，Kroner & Sultan (1993) 所使用的模型有以下兩個特色：(1)使用共整合的概念，把因過分差分而流失的長期均衡關係，利用誤差項調整回來。(2)使用BI-GARCH模型，考慮金融資產間的動態機率分配，使得避險比率隨時間變動。但是這個模型中有一個美中不足的地方，即假設資產報酬的相關係數爲固定常數。

本研究嘗試使用簡易的 Cholesky分解來放寬Kroner & Sultan (1993) 模型中相關係數爲固定常數的限制，並探討改進其缺點後的模型是否可達到更佳的避險效果。同樣地，另一個類似BI-GARCH的因素避險模型 (Factor-Hedge Model) (見Tsay (2002)) ，本研究亦嘗試使用簡易的主成份分析來放寬相關係數的假設，並探討其避險績效是否較佳。

2.1 常數相關係數避險模型(The Constant Correlation Model)

最早在Bollerslev (1990) 的模型中，因爲要使估計的變異數方程式 (volatility equation) 數目降低，所以在做估計時假設相關係數是不隨時間變動的，即 $\rho_{sf,t}=\rho_{sf}$。Kroner & Sultan (1993) 沿用上述的作法，採用常數相關係數避險模型如下

$$s_t = \alpha_s + \beta_s (S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st} \quad (1a)$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f (S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft} \quad (1b)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{st} \\ \varepsilon_{ft} \end{bmatrix} \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t) \quad (1c)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h^2_{s,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h^2_{f,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{sf} \\ \rho_{sf} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \quad (1d)$$

$$h^2_{s,t} = c_s + a_s \varepsilon^2_{s,t-1} + b_s h^2_{s,t-1} \quad (1e)$$

$$h^2_{f,t} = c_f + a_f \varepsilon^2_{f,t-1} + b_f h^2_{f,t-1} \quad (1f)$$

其中，S_t：匯率現貨第t期價格

F_t：匯率期貨第t期價格

s_t：現貨第t期價差 (ΔS_t)

f_t：期貨第t期價差 (ΔF_t)

$(S_{t-1} - \delta F_{t-1})$ ：爲誤差修正項

ε_{st}：現貨第t期殘差項

ε_{ft}：期貨第t期殘差項

Ψ_{t-1} ：t-1期前所有資訊之集合

$h^2_{s,t}$：現貨之條件變異數

$h^2_{f,t}$：期貨之條件變異數

ρ_{sf}：ε_{st}與ε_{ft}之常數相關係數

在上述模型中，若令$a_s = b_s = a_f = b_f = \beta_s = \beta_f = 0$，即爲傳統的OLS模型，若令 $a_s = b_s = a_f = b_f = 0$，則爲加入誤差修正項的共整合模型(ECM, Error Correction Model)，這兩種模型均假設誤差項的變異數爲固定不變，所以避險比率也不變。但在常數相關係數避險模型中，雖然相關係數是固定的，但是因爲條件共變異數矩陣仍隨條件變異數而變動，所以避險比率是隨時間變動的。因此第t期的避險比率，類似於傳統的避險比率，是由現貨與期貨的條件共變數$h_{sf,t}$除以期貨的條件變異數$h^2_{f,t}$，即$h_{sf,t}/h^2_{f,t}$ 。

2.2 動態變動相關係數避險模型(The Time-Varying Correlation Model)

本研究首先參考Pourahmadi(1999)所使用的Cholesky分解式（詳見附錄A）來估計具有隨時間變動相關係數的共變異數矩陣，計算出共變異數矩陣後，即可進一步求得在避險時所使用的避險比率。有別於許多已發展出允許相關係數可隨時間變動的模型（如Engle (2002) 的DCC模型），本文採用此法主要基於下列的好處：(一)這個重新定義變數過程其實僅是一個正交的轉換 (orthogonal transformation)，可以使得概似函數的計算變得非常簡單。(二)此法並不要求一些參數的限制才能使得共變異數矩陣（如下式的H_t）爲positive definite[2]。

[2] 其他vec model及diagonal model (如Bollerslev, Engle and Wooldridge (1988))都需要限制參數矩陣爲positive definite或positive semi-definite來使共變異矩陣爲positive definite。

經正交轉換後的動態變動相關係數避險模型如下所示：

$$s_t = \alpha_s + \beta_s(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st} \qquad (2a)$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft} \qquad (2b)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{st} \\ \varepsilon_{ft} \end{bmatrix} \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t) \qquad (2c)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h^2_{s,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h^2_{f,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{sf,t} \\ \rho_{sf,t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \qquad (2d)$$

參考附錄A中(A.2)式的Cholesky相關分解式，要得出H_t需估計$g_{11,t}$,$g_{22,t}$,$q_{21,t}$因爲[3]

$$h^2_{s,t} = g_{11,t}$$

$$h_{sf,t} = q_{21,t} g_{11,t}$$

$$h^2_{f,t} = g_{22,t} + q^2_{21,t} g_{11,t} \qquad (3)$$

在式 (2c) (2d) 中，當ε_t變異爲一個簡單GARCH (1,1) 的模型時，上述估計式可設計如下

$$\begin{aligned} g_{11,t} &= \theta_{10} + \theta_{11} b^2_{1,t-1} + \beta_{11} g_{11,t-1} \\ q_{21,t} &= \gamma_0 + \gamma_1 q_{21,t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{2,t-1} \\ g_{22,t} &= \theta_{20} + \theta_{21} b^2_{1,t-1} + \theta_{22} b^2_{2,t-1} \\ &\quad + \beta_{21} g_{11,t-1} + \beta_{22} g_{22,t-1} \end{aligned} \qquad (4)$$

其中$b_{1t} = \varepsilon_{1t}$，$b_{2t} = \varepsilon_{2t} - q_{21,t}\varepsilon_{1,t}$

b_{1t}的內容僅含第一元(現貨)的GARCH (1,1)模型，b_{2t}內容則含第一元 (現貨)及第二元(期貨)的GARCH(1,1)模型，而$q_{21,t}$ 則是自我相關並用$\varepsilon_{2,t-1}$ 來當它的解釋變數。

假定ε_t變異爲一 GARCH (1,1) 的模型時，此法的應用先估計出 (4) 式後代入 (3) 式，即可估計出每一期隨時間變動的共變異數矩陣，其中隱含著隨時間變動的相關係數 (如(A.5)式) ，最後依照與常數相關係數避險模型一樣的方式 (即$h_{sf,t}/h^2_{f,t}$）即可得出每一期的避險比率。

2.3 因素避險模型(The Factor Hedge Model)

一個資產報酬的波動，除了受到本身前期波動的影響，也有可能同樣受其他市場上資產報酬之衝擊所干擾。這些影響市場上許多資產變異的共同因素，稱爲共同

[3] 此處用阿拉伯數字1，2主要代表第一元，第二元GARCH(1,1)。如以本文探討的期貨與現貨關係而言，1代表現貨，2代表期貨。

因子 (common factors)，而使用共同因子變異來解釋資產變異的模型，則一般稱爲因素避險模型 (Factor Hedge Model)[4]。由於現貨爲期貨的標的資產，因此影響兩者的波動的因子應十分類似。所以本研究在建構因素避險模型方面，首先應用多變量中的主成份分析 (principal component analysis)找出影響期貨與現貨報酬的共同因子，接著把共同因子的變異帶入期貨與現貨報酬變異的GARCH模型中。在這個模型中，條件共變異矩陣中的條件相關係數也可以隨著時間變動。

使用主成份分析 (詳見附錄B) ，我們得到的因素避險模型如下：

$$s_t = \alpha_s + \beta_s (S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st} \qquad (5a)$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f (S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft} \qquad (5b)$$

條件變異方程式，則是將共同因素P_t的變異$h^2_{p,t}$成爲

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{st} \\ \varepsilon_{ft} \end{bmatrix} \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, H_t) \qquad (5c)$$

$$H_t = \begin{bmatrix} h^2_{s,t} & h_{sf,t} \\ h_{sf,t} & h^2_{f,t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{sf,t} \\ \rho_{sf,t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{s,t} & 0 \\ 0 & h_{f,t} \end{bmatrix} \qquad (5d)$$

$$h^2_{s,t} = c_s + a_s \varepsilon^2_{s,t-1} + b_s h^2_{p,t-1}$$

$$h^2_{f,t} = c_f + a_f \varepsilon^2_{f_{t-1}} + b_f h^2_{p,t-1} \qquad (5e)$$

上式中的$h^2_{p,t}$稱爲共同變異因子 (common volatility factor)。與前述方法相比，此法可減少參數估計的數目使其執行較容易。但由於共同因子無法解釋百分之百的波動，使得其參數估計僅爲合理的趨近值(approximation)，這是此法的缺點。同時令條件相關係數ρ_{sf}隨著時間變動成爲$\rho_{sf,t}$，其值介於0與1之間。

$$\rho_{sf,t} = \frac{\exp(q_t)}{1 + \exp(q_t)}$$

其中

$$q_t = \varpi_0 + \varpi_1 \rho_{sf,t-1} + \varpi_2 \frac{\varepsilon_{s,t-1} \varepsilon_{f,t-1}}{\sqrt{h^2_{s,t-1} h^2_{f,t-1}}} \qquad (6)$$

此式可被稱爲是相關係數的GARCH(1,1)模式，因爲含有前期的相關係數及前期誤差項的乘積[5]。如果 $\varpi_1 = \varpi_2$

[4] 本文之因素避險模型方法參考自Tsay (2002)，其精神與Diebold & Nerlove (1989)及Engle, Ng & Rothschild (1990)的factor-ARCH模型相似。

[5] 上述的作法可參考 Tsay (2002), Chapter 9。

$=0$，則上述模式就會化簡爲常數相關係數的模式。此法的應用將先估計(B.1)式，再將第t期的主成份P_t視爲已知，接著一起估計(5)，(6)式，得出每一期隨時間變動的條件變異數及條件相關係數，即可計算出每一期的避險比率 $b_t^* = h_{sf,t} / h^2_{f,t}$

2.4 模型避險績效評估

若將避險者的現貨及期貨部位視爲一個投資組合 $(s_t - b^* f)$ 以最佳避險比率 (b^*) 之方法進行避險，因此投資組合的變異數即爲

$$Var(s_t - b^* f_t)$$

其中b^*在本研究的三個模型中，都會隨時間的變動而不同。

而避險的績效，一般則根據Ederington (1979)的方法，計算相較於未避險的部位(如現貨)，避險後所組成的投資組合 $(s_t - b^* f)$ 可以減少多少風險，以數學式則表示如下：

$$\frac{\sigma^2_{unhedged} - \sigma^2_{hedged}}{\sigma^2_{unhedged}}$$

此值愈大表示能減少的風險愈多，避險績效愈好。至於衡量模型間避險績效的優劣，也可以應用相同的方式，亦即衡量相對於常數相關係數避險模型，動態變動相關係數避險模型所能減少的報酬變異數程度，其計算方式如下：

$$\frac{\sigma^2_{constant} - \sigma^2_{time-varying}}{\sigma^2_{constant}}$$

此值爲正時，代表動態變動相關係數避險模型的避險效果較好，反之，爲負則表示常數相關係數避險模型的避險效果較佳。

3. 資料與實證結果

3.1 資料來源

爲了與Kroner & Sultan (1993)做比較，因此研究對象及樣本期間也儘量選取與之相同，研究對象爲英磅、加幣、日圓、德國馬克、瑞士法郎[6]。資料來源爲DATASTREAM，取期貨與現貨資料每週四的收盤價以計算每週的報酬率，期貨資料來自於CME，現貨來自於英商柏克萊銀行。爲了避免交易流動性不足，無法反應眞實價格，所以使用最近月的期貨契約。又爲避免到期效果，因此在契約月份到期當月的第一天轉倉，在DATASTREAM中有上述的期貨序列可直接取得使用之。

[6] 根據Kroner & Sultan (1993)，瑞士法郎因爲估計的關係，改取每週五的收盤價。

表 1 研究期間及樣本數

幣別	研究期間	樣本數(週)
英磅	1985年02月14日~1990年02月22日	262
加幣	1988年01月07日~1992年12月31日	260
德國馬克	1985年02月14日~1990年02月22日	262
日圓	1985年02月14日~1990年02月22日	262
瑞士法郎	1985年02月14日~1990年02月22日	262

研究期間及樣本數因資料取得不同而略有差異。以下爲其詳細說明：

3.2 資料處理

本研究所有的資料都先取自然對數，因此單根檢定及共整合檢定投入的價格水準資料型態都是 $ln(S_t)$ 或是 $ln(F_t)$。至於週報酬的算法則將每種貨幣的自然對數資料取差分，此外，爲求小數位數的減少，把報酬再乘上100，例如：現貨的報酬在估計時即以如下的表示方式計算：

$$s_t = (lnS_t - lnS_{t-1}) \times 100$$

其中 s_t =第t期的週報酬率

lnS_t =第t期的現貨外匯價格

lnS_{t-1} =第t-1期的現貨外匯價格

3.3 敘述統計

表2爲五種貨幣報酬率的基本統計量。首先，因爲標的物相同，所以期貨與現貨的基本統計量如：平均數、標準差等都相距不遠。這五種貨幣在研究期間對美元都是升值的，尤以德國馬克升值最多。各國期貨與現貨報酬分配皆呈現高狹峰的情形，符合可能有GRACH效果的「肥尾」(fat tail)現象。由Bera-Jarque常態分配檢定統計量，也可觀察出報酬分配幾乎皆顯著非常態分配[7]，Koutmos & Pericli (1999)指出，這可能是由二階動差短暫相關所造成的。以上結果提供了本研究之後使用BI-GARCH模型的間接證據。

[7] 這非常態分配不至於影響我們後面使用最大概似法(MLE)來估計GARCH模型。電腦軟體中可選用t -分配來進行估計，在我們的大樣本下，這估計應不至於產生偏差。

表 2 五種貨幣報酬率的基本統計量

		平均數	標準差	偏態	峰態	B-J檢定
英磅	(現貨)	17.22%	1.79	0.40	6.68	155.01
	(期貨)	17.02%	1.82	0.40	6.25	122.47
加幣	(現貨)	0.47%	0.61	-0.41	5.06	52.93
	(期貨)	0.32%	0.65	-0.29	4.55	29.66
馬克	(現貨)	25.89%	1.70	0.50	5.19	63.51
	(期貨)	25.75%	1.71	0.29	4.55	29.92
日圓	(現貨)	22.14%	1.64	0.78	6.96	197.95
	(期貨)	21.85%	1.64	0.75	7.06	204.72
瑞郎	(現貨)	24.09%	1.94	0.24	3.90	11.33
	(期貨)	24.05%	2.07	0.16	3.24	1.81

註1.若爲常態分配，其偏態值爲0

2.若爲常態分配，其峰態值爲3

3.B-J爲Bera-Jarque常態檢定統計值，其95%臨界值爲5.99，99%臨界值爲9.21

$$B-J=T\left[\frac{skewness^2}{6}+\frac{(kurtosis-3)^2}{24}\right]$$

3.4 單根與共整合

研究標的的時間序列特性對配適模型十分重要。大部分的金融資產價格時間序列被認爲是非定態的，也就是存在單根，且可利用差分的方式使其符合定態。本研究利用Augmented Dickey-Fuller (ADF) (Dicky & Fuller (1979)，(1981))單根檢定法，確定各投入變數的整合級數(integrated of order)，若整合級次相同，則可進一步進行Engle & Granger (1987)所提出的共整合檢定方法，對期貨與現貨的共整合迴歸式之殘差估計值進行單根檢定。若其殘差爲定態，則代表兩變數存在共整合關係，模型中可加入誤差項加以修正，將長期均衡關係調整回模型中。

檢定結果如表3，英磅、加幣、馬克、日圓、瑞郎期貨與現貨之價格水準項皆無法拒絕存在單根，但在經過一次差分成爲價格差分項後皆拒絕存在單根的虛無假設，即已呈定態，所以這五種貨幣的期貨與現貨整合級次皆爲 *I (1)*，因此進一步進行共整合檢定，檢定發現共整合迴歸式 $\ln S_t=\alpha+\delta\ln F_t+\varepsilon_t$ 的殘差估計值也皆拒絕虛無假設，而爲定態，即爲 *I (0)*序列。所以以上五種貨幣之期貨與現貨存在 *CI (1,1)*之共整合關係，同時也符合Kroner &

Sultan (1993)的實證結果。因此在後續條件報酬方程式(conditional mean equation)中放入誤差項的想法也得到數據的佐證。

表 3 單根與共整合

	ADF檢定統計量						
	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎	95%臨界值	99%臨界值
現貨							
價格水準項	-3.32	-2.01	-2.88	-2.96	-3.03	-2.87	-3.44
價格差分項	-15.79	-15.84	-15.41	-15.47	-16.10	-2.87	-3.44
期貨							
價格水準項	-3.22	-2.07	-2.92	-2.95	-3.00	-2.87	-3.44
價格差分項	-15.88	-16.57	-15.66	-15.78	-16.92	-2.87	-3.44
共整合檢定	-11.85	-7.00	-7.64	-6.91	-8.06	-1.95	-2.58

註1.價格水準項爲原始資料取對數，價格差分項爲價格水準項之取一次差分。
2.ADF爲Augmented Dickey-Fuller檢定統計量，虛無假設爲存在單根。
3.共整合檢定爲Engle and Granger (1987)所提出的共整合檢定，對兩變數共整合迴歸式的殘差做單根檢定，虛無假設爲不存在共整合。共整合迴歸式爲 $\ln S_t = \alpha + \delta \ln F_t + \varepsilon_t$

3.5 ARCH效果

本文前述現貨與期貨的報酬分配具有GARCH效果之特性 (高狹峰)，因此本研究利用Ljung-Box Q統計量及Engle (1982)所提出的LM檢定，檢定現貨與期貨是否可能存在條件異質變異。兩檢定之虛無假設皆爲不存在ARCH效果。

檢定結果如表4所示，總結來說支持條件異質變異的存在。英磅及瑞郎之期貨與現貨存在有十分顯著的ARCH效果，其他三種貨幣，日圓、馬克、加幣在任一檢定也有ARCH效果存在。因此也顯示使用ARCH或GARCH來配適條件變異方程式應有較傳統假設固定變異數模型爲佳的效果。

表 4 ARCH效果檢定

幣別	$Q^2(24)$現貨	$Q^2(24)$期貨	LM現貨	LM期貨
			ARCH(5)	ARCH(5)
英磅	36.42**	43.45***	38.87***	41.42***
			ARCH(3)	ARCH(5)
加幣	13.95	7.88	6.98*	2.34
			ARCH(5)	ARCH(2)
馬克	36.07*	38.85**	3.73	5.17*
			ARCH(5)	ARCH(5)
日圓	22.32	20.25	4.63**	4.31**
			ARCH(1)	ARCH(1)
瑞郎	41.47**	44.38***	13.56**	17.92***

註1.***表示在1%顯著水準下，拒絕虛無假說；**表示在5%顯著水準下拒絕虛無假說；*表示在10%顯著水準下，拒絕虛無假說。

2.$Q^2(24)$表示爲針對殘差的平方所做的Ljung-Box Q統計量，至落後24期。虛無假設爲無ARCH效果存在。

3.LM爲Engle (1982)所提出的LM檢定，檢定是否有ARCH效果存在，虛無假設爲無ARCH效果存在。

3.6 相關係數時間序列

在經過前三部分對研究對象初步的檢定後，確定了報酬方程式中共整合的關係，及變異數方程式中ARCH效果的存在。至於在BI-GARCH的模型設計方面，Bollerslev (1990)及Kroner and Sultan (1993)的模型中假設相關係數爲固定常數，而事實上期貨與現貨間的相關係數並非固定不變 (見表5及圖1)。

平均而言，外匯期貨與現貨的相關係數都在90%以上，顯示兩者存在高度的相關，但以50週(約一年)爲衡量區間的相關係數移動平均，最大值與最小值差距卻可差距至10個百分點以上。由各國的圖示也可以觀察到英磅期貨與現貨的相關係數在1986與1989年降至90%左右，加幣的期貨與現貨的相關係數走勢則呈一個W型的走勢，馬克及加幣期貨與現貨的相關係數走勢呈現一緩步下降的趨勢，瑞郎的部分則是在1987年有一個大轉折低至80%左右[8]。以上種種觀察顯示事實上外匯期貨與現貨的相關係數並非如以往模型所假設的固定不變。

[8] 檢查1987年4月至1988年5月的資料型態，瑞郎在此期間內仍存在共整合關係。

表 5 外匯期貨與現貨相關係數(50週移動平均)

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
最大值	98.65%	98.19%	98.24%	99.13%	97.14%
最小值	88.45%	84.02%	89.20%	85.86%	80.03%
平　均	94.84%	92.34%	95.31%	95.31%	92.97%

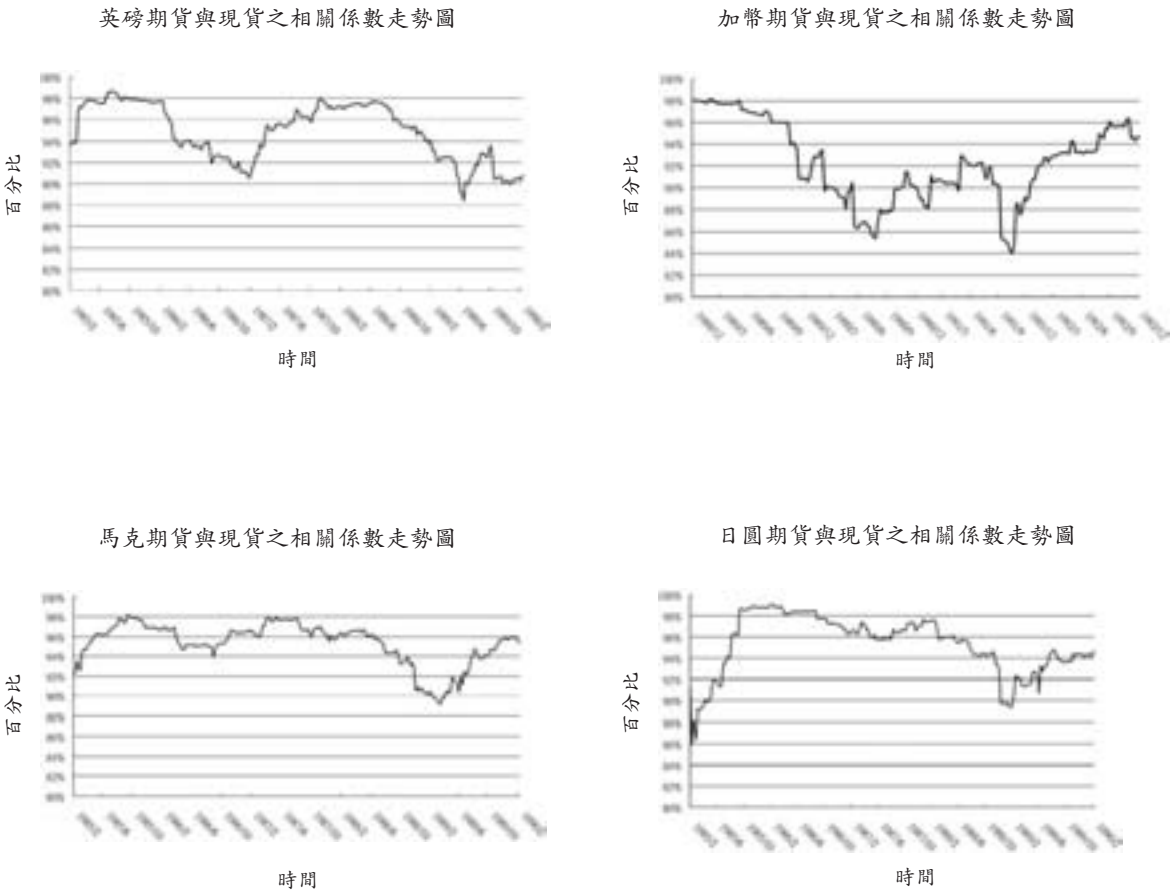


圖1 各貨幣期貨與現貨之相關係數走勢圖

瑞郎期貨與現貨之相關係數走勢圖

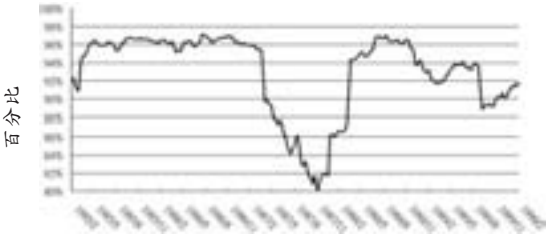


圖1 各貨幣期貨與現貨之相關係數走勢圖（續）

3.7 模型估計與避險比率

本節所比較的模型有三個，分別爲：常數相關係數避險模型、動態變動相關係數避險模型及因素避險模型，後兩者皆具有隨時間變動的相關係數。此外，本節避險績效的比較將分爲樣本內及樣本外，樣本內爲前述之全樣本，樣本外爲重新切割樣本，令前4/5樣本爲估計期，剩下1/5樣本爲避險期間。爲比較不同避險期間對避險績效的影響，避險績效的比較也將分爲日避險、一週避險以及四週避險。

本研究採用RATS軟體，進行參數的最大概似估計。三模型中的誤差修正 $(S_{t-1} - \delta F_{t-1})$ 項，爲了作比較，參考Kroner& Sultan (1993)的作法，將其中的 δ 以1代入[9]。

常數相關係數避險模型參數之估計如表7，估計出的參數與Kroner & Sultan (1993)大同小異，β_s及β_f顯著，印證了共整合關係的存在，同時其餘各係數的顯著表示條件異質的存在，即避險比率也是隨時間變動的。標準化殘差及其平方的Ljung-Box檢定Q(24)及$Q^2(24)$也顯示模型的良好配適。

表6爲因素避險模型的主成份分析表，對樣本的期貨及現貨報酬共變異矩陣進行主成份分析，顯示各外幣期貨與現貨報酬所組成的主成份對報酬的變異皆有很高的解釋百分比。

表 6 主成份分析（使用樣本共變異矩陣）

主成份之	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
特徵值	6.359	0.773	5.681	5.267	7.776
解釋變異百分比	0.975	0.967	0.979	0.980	0.968
特徵向量 e_1	0.701	0.680	0.706	0.705	0.682
e_2	0.713	0.733	0.709	0.709	0.732

動態變動相關係數避險模型及因素避險模型之參數值如表8及9所示。首先，與常數相關係數避險模型比較兩個模型的報酬方程式，可以發現三模型的數值都是相

[9] 可參考Kroner & Sultan (1993) 對此所作的說明。

近的。動態變動相關係數避險模型及因素避險模型估計出的各國期貨與現貨間之平均相關係數也與常數相關係數避險模型所估計的相似。各貨幣動態變動相關係數避險模型與因素避險模型之概似函數皆大於常數相關係數避險模型（除了加幣的因素避險模型），也顯示動態變動相關係數避險模型及因素避險模型對現貨與期貨的變動有較佳的描述。

表 7 常數相關係數避險模型之最大概似估計

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
α_s	-0.04	-0.08	0.14*	0.06*	0.11*
α_f	-0.32*	-0.21*	0.41*	0.29*	0.58*
β_s	0.30*	0.18*	-0.30*	-0.34*	-0.25*
β_f	0.82*	0.46*	0.30*	0.16*	0.52*
c_s	2.19*	0.20*	2.89*	2.51*	2.42*
c_f	1.83*	0.27*	1.53*	2.19*	2.15*
a_s	0.06*	0.29*	0.02	0.02	0.04
a_f	0.04*	0.29*	0.04	0.04	0.04
b_s	0.25*	0.24*	-0.04	0.03	0.29*
b_f	0.39*	0.14	0.42*	0.14*	0.44*
ρ	0.98*	0.95*	0.97*	0.97*	0.96*
L	-159.26	281.55	-157.42	-146.52	-283.35
Q(24)(現貨)	16.44	21.69	22.71	19.25	21.12
Q^2(24)(現貨)	25.21	12.65	35.23	20.97	33.58
Q(24)(期貨)	18.56	27.68	24.88	13.82	23.76
Q^2(24)(期貨)	33.13	11.34	30.95	18.40	35.43

註1.L爲概似函數的值

2.標示*爲在95%信賴水準下顯著

3.Q(24)爲標準化殘差之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

Q^2(24)爲標準化殘差平方之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

4.原方程式爲

$$s_t = \alpha_s + \beta_s(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st}$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft}$$

$$h^2_{s,t} = c_s + a_s\varepsilon^2_{s,t-1} + b_s h^2_{s,t-1}$$

$$h^2_{f,t} = c_f + a_f\varepsilon^2_{f,t-1} + b_f h^2_{f,t-1}$$

表 8 動態變動相關係數避險模型之最大概似估計

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
α_s	0.0046	-0.0511	0.2011*	0.1101*	0.1662*
α_f	-0.2750*	-0.1823*	0.4508*	0.3072*	0.6146*
β_s	0.2670*	0.1872*	-0.1775*	-0.3383*	-0.2501*
β_f	0.7994*	0.4673*	0.3850*	0.1101	0.4705*
θ_{10}	2.9248*	0.0770*	4.1231*	2.0800*	3.8928*
θ_{11}	0.0667*	0.1449*	0.0231	0.1180*	0.2066*
β_{11}	0.0000	0.6607*	-0.4723	0.1069	-0.2524
γ_0	0.6245*	1.9390*	0.6366*	0.4115*	0.5111*
γ_1	0.3653*	-0.9435*	0.3444*	0.5790*	0.5023*
γ_2	0.0043*	-0.0105	0.0032	0.0201*	-0.0030
θ_{20}	0.0196*	0.0367*	0.1280*	0.0887*	0.3719*
θ_{21}	-0.0015*	0.0951*	0.0053*	0.0000	-0.0063*
θ_{22}	0.0761*	-0.0041	0.0394	0.1167*	0.0256
β_{21}	0.0362*	-0.0527*	-0.0347*	0.0074*	-0.0046
β_{22}	0.0681	0.0514	0.6897*	0.1735*	-0.0440
平均 ρ	0.97	0.94	0.97	0.97	0.96
L	-145.40	291.81	-155.14	-136.98	-275.62
Q(24)(現貨)	17.00	17.84	20.54	19.76	20.34
Q^2(24)(現貨)	36.40	7.26	37.36	17.82	29.53
Q(24)(期貨)	18.19	26.69	24.02	13.79	22.47
Q^2(24)(期貨)	44.64	13.25	39.24	15.73	30.33

註1.L爲概似函數的值

2.標示*爲在95%信賴水準下顯著

3.Q(24)爲標準化殘差之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

Q^2(24)爲標準化殘差平方之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

4.原方程式爲

$$s_t = \alpha_s + \beta_s(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st}$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft}$$

$$g_{11,t} = \theta_{10} + \theta_{11} b^2_{1,t-1} + \beta_{11} g_{11,t-1}$$

$$q_{21,t} = \gamma_0 + \gamma_1 q_{21,t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{2,t-1}$$

$$g_{22,t} = \theta_{20} + \theta_{21} b^2_{1,t-1} + \theta_{22} b^2_{2,t-1} + \beta_{21} g_{11,t-1} + \beta_{22} g_{22,t-1}$$

表 9 因素避險模型之最大概似估計

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
α_s	0.01	-0.11*	0.17*	0.13*	0.08
α_f	-0.28*	-0.24*	0.45*	0.35*	0.54*
β_s	0.27*	0.21*	-0.32*	-0.26*	-0.36*
β_f	0.81*	0.48*	0.28*	0.24*	0.37*
c_s	2.20*	0.20*	1.21*	1.62*	1.66*
c_f	2.13*	0.27*	0.70*	1.88*	1.65*
a_s	0.04*	0.22*	0.04*	0.00	0.06*
a_f	0.03	0.41*	0.03	0.07	0.04
b_s	0.33*	0.24*	0.27*	0.47*	0.33*
b_f	0.37*	0.26	0.37*	0.29*	0.43*
ϖ_0	-1.31*	-0.50*	-1.58*	-0.35*	-1.15*
ϖ_1	4.98*	3.62*	5.19*	3.83*	4.17*
ϖ_2	0.16*	-0.02	0.05	0.15*	0.37*
平均 ρ	0.98	0.95	0.97	0.97	0.96
L	-155.90	281.15	-155.08	-139.42	-271.42
Q(24)(現貨)	16.76	25.98	23.98	18.79	22.20
Q^2(24)(現貨)	22.82	11.79	32.00	19.90	30.28
Q(24)(期貨)	18.96	32.28	26.44	14.68	23.67
Q^2(24)(期貨)	29.48	12.93	31.81	18.25	27.24

註1.L爲概似函數的值

2.標示*爲在95%信賴水準下顯著

3.Q(24) 爲標準化殘差之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

Q^2(24)爲標準化殘差平方之落後24期Ljung-Box檢定值，χ^2_{24}=36.42

4.原方程式爲

$$s_t = \alpha_s + \beta_s(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{st}$$

$$f_t = \alpha_f + \beta_f(S_{t-1} - \delta F_{t-1}) + \varepsilon_{ft}$$

$$h^2_{s,t} = c_s + a_s\varepsilon^2_{s,t-1} + b_s h^2_{p,t}$$

$$h^2_{f,t} = c_f + a_f\varepsilon^2_{f,t-1} + b_f h^2_{p,t}$$

$$\rho_{sf,t} = \frac{\exp(q_t)}{1+\exp(q_t)}$$

$$q_t = \varpi_0 + \varpi_1\rho_{sf,t-1} + \varpi_2\frac{\varepsilon_{s,t-1}\varepsilon_{f,t-1}}{\sqrt{h^2_{s,t-1}h^2_{f,t-1}}}$$

至於避險比率的估計方面，表10至表12分別列出三模型所估計出的避險比率。雖然三模型估出的平均避險比率十分相似，但由觀察後兩者的標準差來看，動態變動相關係數避險模型及因素避險模型所估出的避險比率顯然較常數相關係數避險模型變異較大（除了加幣的因素避險模型與馬克的動態變動相關係數避險模型）。同樣的結論也可參照圖2。顯示動態變動相關係數避險模型及因素避險模型中因爲相關係數不再是固定常數，使得避險比率更能隨著市場資訊的改變而變動。

表 10 常數相關係數避險模型之避險比率

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
最小值	0.935	0.628	0.821	0.827	0.870
最大值	1.159	1.192	1.029	1.000	0.952
平均數	0.971	0.899	0.972	0.966	0.902
標準差	0.023	0.068	0.026	0.019	0.012

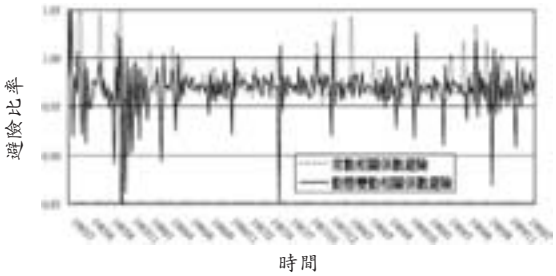
表 11 動態變動相關係數避險模型之避險比率

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
最小值	0.782	0.671	0.863	0.819	0.790
最大值	1.048	1.074	1.016	1.111	0.992
平均數	0.967	0.891	0.971	0.967	0.893
標準差	0.027	0.069	0.016	0.039	0.025

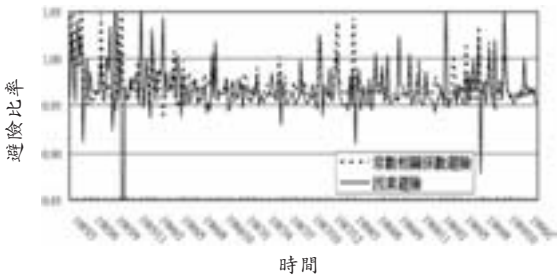
表 12 因素避險模型之避險比率

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
最小值	0.672	0.701	0.804	0.867	0.837
最大值	1.080	1.126	1.124	1.075	0.993
平均數	0.967	0.894	0.972	0.972	0.902
標準差	0.031	0.062	0.046	0.034	0.021

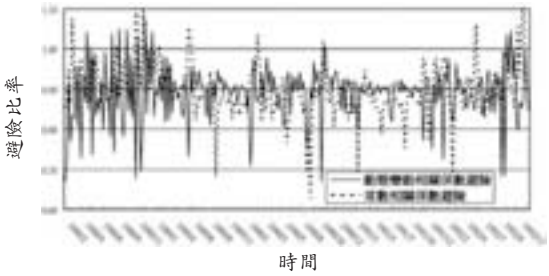
英磅避險比率比較圖



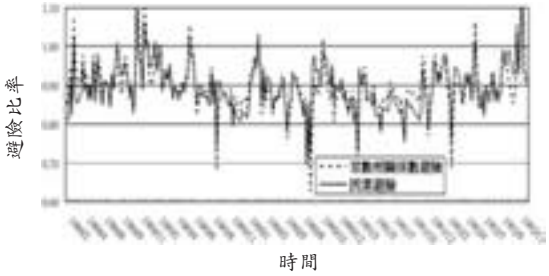
英磅避險比率比較圖



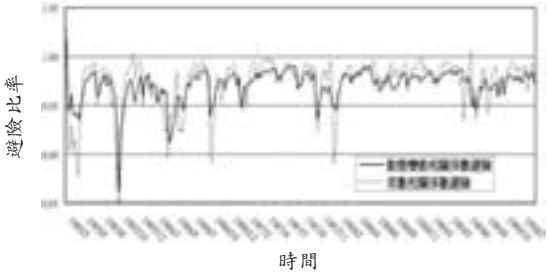
加幣避險比率比較圖



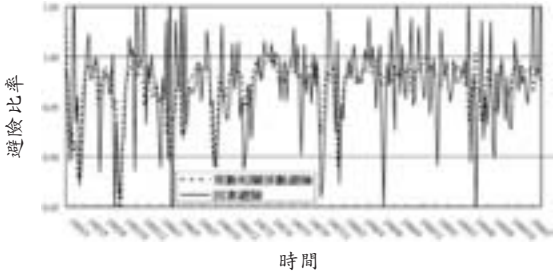
加幣避險比率比較圖



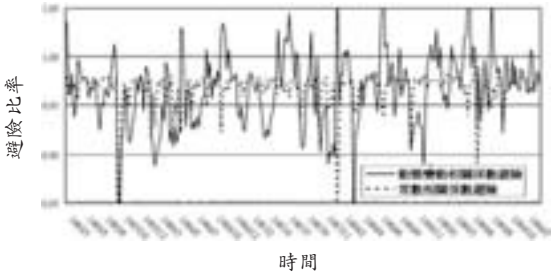
馬克避險比率比較圖



馬克避險比率比較圖



日圓避險比率比較圖



日圓避險比率比較圖

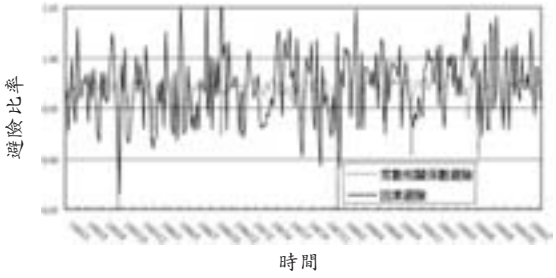


圖 2 各模型避險比率比較圖

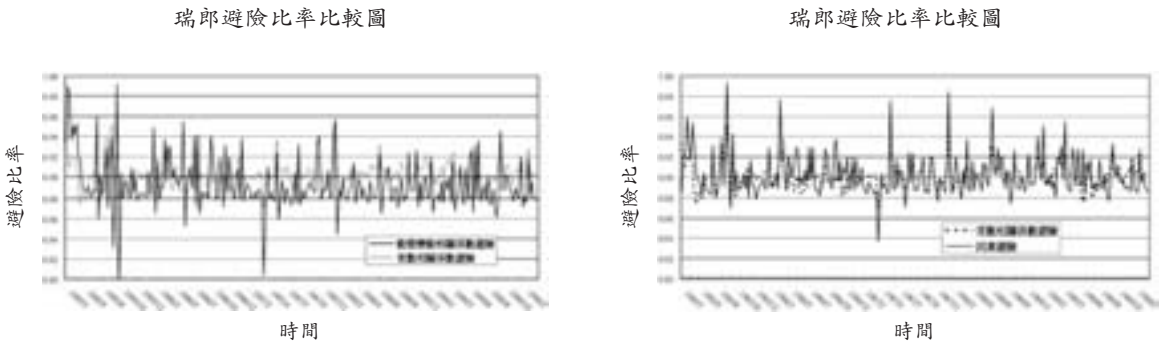


圖 2 各模型避險比率比較圖（續）

3.8 樣本內外及避險期間之績效比較

3.8.1 樣本內(Within Sample)比較

樣本內的避險績效將分爲日避險、一週避險及四週避險來衡量，因此日避險共有1,310期，一週避險有262期，四週避險有64期。

表13至表15分別爲樣本內日、一週及四週避險績效，在樣本內日避險方面，兩個含有隨時間變動相關係數的模型中，以因素避險模型較爲穩定，避險績效皆優於常數相關係數避險模型，約有0.46%~2.18%的績效改善。動態變動相關係數避險模型相對於常數相關係數避險模型則互有優劣。

樣本內一週避險方面，總體而言動態變動相關係數避險模型及因素避險模型皆有穩定的績效改善，日圓、瑞郎之動態變動相關係數避險模型相對於常數相關係數避險模型分別有2 ~ 2.5%的績效改善，英磅、馬克之因素避險模型相對於常數相關係數避險模型則分別有2% ~ 3%的績效改善。樣本內四週避險方面，表15則顯示三模型則互有優劣。

若從另一種比較的觀點觀之，以相對於不避險所能減少的風險來衡量，則可參照表16，平均而言，樣本內日避險以因素避險模型相對於常數相關係數避險模型較佳，一週避險方面，不論動態變動相關係數避險模型或因素避險模型皆比常數相關係數避險模型佳，四週避險則以常數相關係數避險模型較佳。

表 13 樣本內單日避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
投資組合變異數比較 註1					
常數相關係數避險	0.2091	0.0164	0.1935	0.1559	0.2731
動態變動相關係數避險	0.2102	0.0162	0.1984	0.1565	0.2721
因素避險	0.2046	0.0164	0.1900	0.1550	0.2688
相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2					
動態變動相關係數避險	-0.53%	1.74%	-2.56%	-0.39%	0.40%
因素避險	2.18%	0.46%	1.81%	0.56%	1.57%

表 14 樣本內一週避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
投資組合變異數比較 註1					
常數相關係數避險	0.1929	0.0463	0.2301	0.2059	0.4683
動態變動相關係數避險	0.1927	0.0473	0.2295	0.2018	0.4557
因素避險	0.1888	0.0462	0.2231	0.2059	0.4623
相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2					
動態變動相關係數避險	0.13%	-2.06%	0.26%	2.02%	2.68%
因素避險	2.13%	0.31%	3.04%	0.04%	1.27%

表 15 樣本內四週避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
投資組合變異數比較 註1					
常數相關係數避險	0.3899	0.0981	0.3464	0.4284	0.7096
動態變動相關係數避險	0.3821	0.1367	0.3414	0.4285	0.6996
因素避險	0.3696	0.1031	0.3625	0.4081	0.7084
相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2					
動態變動相關係數避險	1.99%	-39.39%	1.45%	-0.03%	1.42%
因素避險	5.21%	-5.17%	-4.65%	4.76%	0.18%

註1.投資組合變異數爲 $Var(s_t - b^* f_t)$

註2.定義：變異數改善百分比計算方式爲 $\frac{\sigma^2_{constant} - \sigma^2_{time-varying}}{\sigma^2_{constant}}$

表 16 樣本內避險績效與避險期間比較
(以相對於不避險所減少的風險來衡量)*

模型	幣別	單日避險	單週避險	四週避險
常數相關係數避險	英磅	63.07%	94.04%	96.73%
	加幣	76.17%	87.60%	93.41%
	馬克	62.94%	92.05%	96.70%
	日圓	63.86%	92.40%	96.36%
	瑞郎	57.46%	87.57%	93.92%
平均		**64.70%**	**90.73%**	**95.42%**
動態變動相關係數避險	英磅	62.87%	94.05%	96.80%
	加幣	76.59%	87.34%	90.81%
	馬克	62.00%	92.07%	96.74%
	日圓	63.72%	92.55%	96.36%
	瑞郎	57.63%	87.90%	94.01%
平均		**64.56%**	**90.78%**	**94.94%**
因素避險	英磅	63.87%	94.17%	96.90%
	加幣	76.28%	87.64%	93.07%
	馬克	63.61%	92.29%	96.54%
	日圓	64.06%	92.40%	96.53%
	瑞郎	58.13%	87.73%	93.93%
平均		**65.19%**	**90.85%**	**95.40%**

＊計算方式為 $\frac{\sigma^2_{unhedged}-\sigma^2_{hedged}}{\sigma^2_{unhedged}}$，風險愈多，避險績效愈好

3.8.2 樣本外(Out-of-Sample)比較

使用樣本內的資料所計算出的避險比率來比較避險績效，實際上是屬於事後(ex post)觀點，而實際上較有經濟意義的應屬樣本外的績效比較，因具代表事前(ex ante)的觀點。

因此本研究將樣本重新切割，前四年做爲估計期，第五年(1989年2月23日至1990年2月22日)做爲樣本外的避險績效比較期間，所以週資料有52個，日資料則有

262個。樣本外避險比率的估計方式，因爲考慮到避險者應依據每期所能得到最新的資訊做避險，所以採用移動視窗的方式做one-step ahead預測，即每一次估計完即捨棄一個觀測值，並加入一個最新的觀測值，保持觀測值的數目相同，再重新估計模型參數並計算新的one-step ahead避險比率，重複此步驟直至資料使用完畢。

避險績效的衡量方式仍與樣本內相同，即以各模型移動視窗計算出的各期避險比率代入最後一年各期的期貨與現貨報酬，計算避險投資組合的報酬變異程度，與常數相關係數避險模型相比較之。

表17至表19分別爲樣本外日、一週及四週避險績效，在樣本外日避險方面，以動態變動相關係數避險模型較爲穩定，避險績效大都優於常數相關係數避險模型，加幣有1.62%的績效改善，馬克則有2.12%的績效改善。因素避險模型相對於常數相關係數避險模型則互有優劣。

樣本外一週避險及四週避險方面，由表18、19觀察，三模型似乎互有優劣。

從另一種比較的觀點，表20則顯示樣本外，以相對於不避險所能減少的風險來衡量，平均而言，樣本外日、一週避險及四週避險除了日避險的因素避險模型外，動態變動相關係數避險模型及因素避險模型避險效果皆較常數相關係數避險模型佳。

因此，平均而言，具有隨時間變動相關係數的模型，如動態變動相關係數避險模型及因素避險模型，放寬了常數相關係數避險模型中的限制後，對期貨與現貨的動態關係有較佳的描述，因此相對於常數相關係數避險模型有較佳的避險效果。

表 17 樣本外單日避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
	投資組合變異數比較 註1				
常數相關係數避險	0.2304	0.0228	0.2085	0.2236	0.2719
動態變動相關係數避險	0.2283	0.0225	0.2041	0.2232	0.2731
因素避險	0.2307	0.0232	0.2084	0.2230	0.2753
	相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2				
動態變動相關係數避險	0.91%	1.62%	2.12%	0.18%	-0.44%
因素避險	-0.12%	-1.44%	0.05%	0.27%	-1.28%

表 18 樣本外一週避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
投資組合變異數比較 註1					
常數相關係數避險	0.5529	0.0448	0.2100	0.2997	0.4819
動態變動相關係數避險	0.5439	0.0468	0.2114	0.2966	0.4708
因素避險	0.5477	0.0428	0.2157	0.2943	0.4834
相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2					
動態變動相關係數避險	1.63%	-4.41%	-0.69%	1.02%	2.29%
因素避險	0.95%	4.49%	-2.72%	1.80%	-0.33%

表 19 樣本外四週避險績效比較

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
投資組合變異數比較 註1					
常數相關係數避險	0.4637	0.3374	0.2594	0.4841	1.1218
動態變動相關係數避險	0.4513	0.1769	0.2157	0.5749	1.1292
因素避險	0.5030	0.2667	0.2281	0.6761	1.1681
相對於常數相關係數避險模型變異數改善百分比 註2					
動態變動相關係數避險	2.68%	47.58%	16.86%	-18.76%	-0.66%
因素避險	-8.46%	20.95%	12.07%	-39.67%	-4.12%

註1.投資組合變異數爲 $Var(s_t - b^* f_t)$

註2.定義：變異數改善百分比計算方式爲 $\frac{\sigma^2_{constant} - \sigma^2_{time-varying}}{\sigma^2_{constant}}$

在樣本內，綜合各幣別三種避險期間來看，動態變動相關係數避險模型及因素避險模型避險績效比較穩定（即相對避險績效皆爲正，較常數相關係數避險模型佳）的有英磅、日圓及瑞郎，尤其是瑞郎，兩個含有動態相關的避險係數模型不論在那一種避險期間，其避險績效皆較常數相關係數模型佳。究其原因，推測可能是此三種貨幣的相關係數在研究期間變動較大(見表21) 其中又以瑞郎變動最大，使動態變動相關係數避險模型及因素避險模型較能發揮所長（但是，加幣結果的觀察似乎又使我們對推測的原因難以下結論）。在樣本外，也是存在此現象，以相關係數變動較

表 20 樣本外避險績效與避險期間比較

模型	幣別	單日避險	單週避險	四週避險
常數相關係數避險	英磅	53.75%	80.70%	95.14%
	加幣	71.45%	89.60%	71.42%
	馬克	55.95%	90.84%	97.56%
	日圓	49.62%	88.64%	91.53%
	瑞郎	55.09%	82.90%	88.09%
平均		**57.17%**	**86.54%**	**88.75%**
動態變動相關係數避險	英磅	54.17%	81.01%	95.27%
	加幣	71.91%	89.14%	85.02%
	馬克	56.88%	90.77%	97.97%
	日圓	49.71%	88.76%	89.94%
	瑞郎	54.90%	83.30%	88.01%
平均		**57.52%**	**86.60%**	**91.24%**
因素避險	英磅	53.70%	80.88%	94.72%
	加幣	71.04%	90.07%	77.41%
	馬克	55.97%	90.59%	97.86%
	日圓	49.76%	88.84%	88.17%
	瑞郎	54.52%	82.85%	87.59%
平均		**57.00%**	**86.65%**	**89.15%**

註：表中績效以相對於不避險所減少的風險來衡量，計算方式為 $\frac{\sigma^2_{unhedged}-\sigma^2_{hedged}}{\sigma^2_{unhedged}}$ 減少的風險愈多，避險績效愈好。

大的馬克，有較穩定的動態變動相關係數避險模型效果 (日、四週相對避險績效皆爲正)。

另外，影響樣本外模型績效穩定性的原因，也有可能來自於下列兩方面：(一)受避險期間相關係數變動大小影響，各幣別之樣本外相關係數之標準差除了馬克外，其餘幣別皆較樣本內小；(二)樣本外移動視窗時間不夠長，所以因此較無法發揮動態變動相關係數避險模型及因素避險模型的優點。

表 21 相關係數標準差比較(以50週移動平均為例)

	英磅	加幣	馬克	日圓	瑞郎
樣本內	2.64%	3.61%	2.12%	2.81%	4.42%
樣本外	1.25%	1.43%	2.28%	1.18%	1.64%

3.8.3 不同避險期間下的避險績效

Holmes (1996)在最小風險架構下，使用一元GARCH (1,1) 模型比較不同避險期間下(分別爲一週、二週、四週) 的避險績效是否不同，結果得出，較長的避險期間，相對於不避險的部位，有較佳的避險效果。Holmes (1996)指出，雖然隨著避險期間的拉長，報酬的變異 (總風險) 會變大，但是基差風險占總風險的比例則會下降，因此避險績效隨著避險期間增加而增加[10]。

本文中，不同的避險期間對避險績效的影響，可以觀察表19及表20。以相對於不避險所能減少的風險來衡量，不論那一個模型，平均而言，避險績效皆隨著避險期間增加而增加，與Holmes (1996)的實證相符合。

4. 結論

本研究探討動態變動相關係數避險模型及因素避險模型相對於常數相關係數避險模型之避險績效。研究對象爲1985年2月14日至1990年2月22日之英磅、馬克、日圓、瑞郎及1988年1月7日至1992年12月31日之加幣。對週資料進行基本敘述統計、單根檢定、共整合分析後，即進入模型之估計與比較，並爲確保結果的完整性及瞭解避險期間長短的影響，在做避險績效之比較時將更進一步分爲樣本內、外及日、一週、四週避險。

本研究得出相關結論如下：

(一)平均而言，樣本內日避險以因素避險模型相對於常數相關係數避險模型較佳，一週避險方面，不論動態變動相關係數避險模型或因素避險模型皆比常數相關係數避險模型佳，四週避險則以常數相關係數避險模型較佳。樣本外，以相對於不避險所能減少的風險來衡量，平均而言，樣本外日避險、一週避險及四週避險中，除了日避險的因素避險模型外，動態變動相關係數避險模型及因素避險模型避險效果皆較常數相關係數避險模型佳。

[10] **此處的"基差風險"定義為期貨價與現貨價之間的差(稱為基差**(basis))**的變異或不確定性。**

(二)平均而言，具隨時間變動相關係數的模型，如動態變動相關係數避險模型及因素避險模型，放寬了常數相關係數避險模型中的限制後，更能捕捉外匯期貨與現貨的動態關係，因此相對於常數相關係數避險模型有較佳的避險效果。

(三)研究期間、各幣別相關係數變動的大小會影響動態變動相關係數避險模型及因素避險模型的相對績效。

(四)以相對於不避險所能減少的風險來衡量，樣本內及樣本外的大部分幣別，各模型之避險績效隨著避險期間增加而增加，此與Holmes (1996)結論相同。Holmes (1996)指出雖然報酬的變異會隨著衡量時間延長而變大，但隨著避險期間的拉長，基差風險占總風險的比例會下降，因此避險績效應該會隨著避險期間增加而增加。

參考文獻

Baillie, R.T. and Myers, R.J. (1991), "Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge," *Journal of Applied Econometrics,* 6, 109-124.

Bollerslev, T., Engle, R.F., and Wooldridge, J.M. (1988), "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances," *The Journal of Political Economy,* 96, 116-131.

Bollerslev, T. (1990), "Modeling the Coherence in Short-Term Nominal Exchange rates: a Multivariate Generalized ARCH Approach," *Review of Economics and Statistics,* 72, 498-505.

Cecchetti, S.G., Cumby, R.E., and Figlewski, S. (1988), "Estimation of Optimal Futures Hedge," *Review of Economics and Statistics,* 70, 623-630.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979), " Distribution of the Estimates for Autoregressive Time Series with Unit Root," *Journal of the American statistical Association,* 74, 427-431.

Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1981), " Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root," *Econometrica,* 49, 1057-1072.

Diebold, F.X. and Nerlove, M. (1989), "The Dynamics of Exchange Rate Volatility: a Multivariate Latent Factor ARCH Model," *Journal of Applied Econometrics,* 4, 1-21.

Ederington, L.H. (1979), " The Hedging Performance of the New Futures Markets," *Journal of Finance,* 34, 157-170.

Engle, R.F. (1982), "Autoregressive Conditional

Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica,* 50, 987-1007.

Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1987), "Co-integration and Error Correction: Representation Estimation and Testing," *Econometrica,* 55, 251-276.

Engle, R.F. and Kroner, K.F (1995), "Multivariate Simultaneous Generalized GARCH," *Econometric Theory,* 11, 122-50.

Engle, R.F., Ng, V.K. and Rothschild, M. (1990), "Asset Pricing with a Factor-ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills," *Journal of Econometrics,* 45, 213-237.

Franses, P.H. & D. van Dijk (2000), *Nonlinear Time Series Models in Empirical Finance,* Cambridge.

Ghosh, A. (1993), "Hedging with Stock Index Futures: Estimation and Forecasting with Error Correction Model," *Journal of Futures Markets,* 13, 743-752.

Holmes, P. (1996), "Stock Index Futures Hedging: Hedge Ratio Estimation, Duration Effects, Expiration Effects and Hedge Ratio Stability," *Journal of Business Finance and Accounting,* 23(1), 63-77.

Koutmos, G. and Pericli, A. (1999), "Hedging GNMA Mortgage-Backed Securities with T-note futures: Dynamic versus Static hedging," *Real Estate Economics,* 27, 335-363.

Kroner, K.F. and Sultan, J. (1993), "Time Varying Distributions and Dynamic Hedging with Foreign Currency Futures," *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 28, 535-551.

Longin, F. M. and Solnik, B. (1995), "Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960-1990?" *Journal of International Money and Finance,* 14, 3-26.

Ng, V.K., R.F. Engle and M. Rothschild (1992), "A Multidynamic Factor Model for Stock Returns," *Journal of Econometrics,* 52, 245-265.

Park, T.H. and Switzer, L.N. (1995), "Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Hedge Ratios for Stock Index Futures: A Note," *The Journal of Futures Markets,* 15, 61-67.

Pourahmadi, M. (1999), "Joint Mean-Covariance Models with Applications to Longitudinal Data: Unconstrained Parameterization," *Biometrika,* 86, 677-690.

Tsay, R.S. (2002), Analysis of Financial Time Series, John Wiley & Sons, Inc.

附錄A：Cholesky 分解式

因爲H_t爲positive definite。所以存在有一個帶有unit diagonal elements的下三角矩陣(lower triangular matrix) L_t及另一個帶有positive diagonal elements的對角矩陣G_t 形成：

$$H_t = L_t G_t L_t' \tag{A.1}$$

這就是知名的H_t的Cholesky分解式，採用這個分解式的好處是L_t及G_t裡的要素對於共變異數矩陣都有很好的解釋作用。以下就先以二元的例子來說明。

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{21,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix}$$

$$L_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21,t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_t = \begin{bmatrix} g_{11,t} & 0 \\ 0 & g_{22,t} \end{bmatrix}$$

其中對於i =1及2，$g_{ii,t} > 0$。[11]

使用公式(A.1)可得：

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{21,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11,t} & q_{21,t} g_{11,t} \\ q_{21,t} g_{11,t} & g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t} \end{bmatrix}$$

所以使兩邊矩陣裡的要素(elements)相等，即得：

$$\begin{aligned} h_{11,t} &= g_{11,t}, \\ h_{21,t} &= q_{21,t} g_{11,t}, \\ h_{22,t} &= g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t} \end{aligned} \tag{A.2}$$

求解以上方程式，可得：

$$\begin{aligned} g_{11,t} &= h_{11,t}, \\ q_{21,t} &= \frac{h_{21,t}}{h_{11,t}}, \\ g_{22,t} &= h_{22,t} - \frac{h_{21,t}^2}{h_{11,t}} \end{aligned} \tag{A.3}$$

同時再考慮下列簡單的條件線性迴歸式

$$\varepsilon_{2t} = \beta \varepsilon_{1t} + b_{2t} \tag{A.4}$$

其中b_{2t}是誤差項，依最小平方法理論，可得：

$$\beta = \frac{Cov(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})}{Var(\varepsilon_{1t})} = \frac{h_{21,t}}{h_{11,t}}$$

11 如以本文探討的期貨與現貨關係式(2a)-(2d)為例，在此i =1代表現貨，i =2代表期貨。

$$Var(b_{2t}) = Var(\varepsilon_{2t}) - \beta^2 Var(\varepsilon_{1t})$$
$$= h_{22,t} - \frac{h_{21,t}^2}{h_{11,t}}$$

因爲誤差 b_{2t} 項和迴歸項 ε_{1t} 非關，所以以上二式與(A.3)一起整理可得出：

$$g_{11,t} = h_{11,t} \quad ,$$

$$q_{21,t} = \beta \quad ,$$

$$g_{22,t} = Var(b_{2t}) \text{，} b_{2t} \perp \varepsilon_{1t}$$

此處⊥指兩者不相關。

總結來說，Cholesky分解式就是把 ε_t 序列用正交轉換(orthogonal transformation)的方法轉成 $b_t = (b_{1t}, b_{2t})'$ ，形成 $b_{1t} = \varepsilon_{1t}$ 及 $b_{2t} = \varepsilon_{2t} - q_{21,t}\varepsilon_{1t}$

此處 $q_{21,t} = \beta$ 就是由(A.4)中得出的。而 b_{1t} 可以說是經過轉換過的誤差項(transformed shocks)。

所以在二元的計算式中，只要估計 L_t 及 G_t 其因子 $g_{11,t}$ $q_{21,t}$ $g_{22,t}$ 就可以得出隨時間變動的共變異數矩陣，其中隱含著隨時間變動的相關係數。因爲

$$\rho_{21,t} = \frac{h_{21,t}}{\sqrt{h_{11,t} h_{22,t}}}$$
$$= q_{21,t} \times \frac{\sqrt{h_{11,t}}}{\sqrt{h_{22,t}}}$$
$$= q_{21,t} \times \frac{\sqrt{g_{11,t}}}{\sqrt{g_{22,t} + q_{21,t}^2 g_{11,t}}} \quad \text{(A.5)}$$

是隨時間變動，只要 $q_{21,t} \neq \rho\sqrt{h_{22,t}} / \sqrt{h_{11,t}}$ ，其中 ρ 爲常數相關係數。

由上述說明，我們可以瞭解Cholesky分解式不但可使概似函數變得簡單，而且又沒有要求一些參數的限制才能使得共變異數矩陣 H_t 爲positive definite。

附錄B：因素避險模型

建立一個因素避險模型的步驟可概述如下：

1. 對期貨與現貨報酬共變異矩陣做主成份分析，計算特徵值及特徵向量。與主成份相對的特徵向量$e=(e_1,e_2)'$即是其係數，可表示如下：

$$P_t = e_1 s_t + e_2 f_t \tag{B.1}$$

其中P_t：第t期主成份

S_t：現貨第t期價差

f_t：期貨第t期價差

2. 主成份P_t的條件變異模型可表達如下：

$$P_t = \mu + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \mid \Psi_{t-1} \sim N(0, h_{p,t}^2) \tag{B.2}$$

3. 將前一期主成份的變異帶入避險模型(1e)-(1f)中來取代期貨現貨的條件變異數，報酬方程式(mean equation)仍維持原來的共整合方程式(5a)，(5b)，即可得文中式(5c)-(5e)。